ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Examen Final **10/05/2024**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

<table>
<tr><th colspan="2">1</th><th colspan="2">2</th><th>3</th><th colspan="2">4</th><th>5</th><th>CALIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos.

---

1) Sean las rectas: $L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta L_2 que pasa por los puntos $P(1, k, 0)$ y $Q(1, 1, 4)$.

   a) Encontrar, si es posible, el valor real de k tal que las rectas sean paralelas. Luego, calcular la distancia entre ellas.

   b) Para $k = 0$, hallar una ecuación del plano π que contenga a la recta L_2 y que resulte perpendicular al plano coordenado yz.

---

2) Sean $B = \{a,\ b, c\ \}$ una base del espacio vectorial V y $T\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T(x_1 a +\ x_2 b + x_3 c) = (2x_1 - x_2 + 4x_3\ , x_1 - x_3) \quad \text{con } x_1,\ x_2,\ x_3\ \in \mathbb{R}.$$

   a) Calcular la matriz asociada a la transformación lineal T en la base B y la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   b) Indicar, **justificando la respuesta**, si la transformación lineal es un isomorfismo.

---

3) Dados los subespacios del espacio vectorial $P_2[x]$:

$$S_1 = \{p(x) \in P_2[x]/(x-1) \text{ divide } a\ p(x)\} \text{ y } S_2 = \{p(x) \in P_2[x]/(x+1) \text{ divide } a\ p(x)\}$$

   Hallar $S_1 \cap S_2$, una base y su dimensión.

---

4) Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3x1}\ y\ B \in \mathbb{R}^{1x3}, A\ y\ B\ no$ nulas, entonces $M = A.B$ es una matriz invertible**.**

   b) Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que $\lambda = 0$ es autovalor de la matriz A, entonces el rango de la matriz A es menor que 3.

---

5) Sea la superficie de ecuación $\xi\colon Ax^2 - By^2 + z^2 = 1$

   a) Hallar los valores de $A, B\ \in\ \mathbb{R}$ para que se cumpla simultáneamente que la traza de la superficie ξ con el plano xy sea una hipérbola equilátera y su traza con el plano yz sea la curva: $(x, y, z) = (0, 2\cos(t)\,, sen(t))\ \ t \in [0,2\pi)$. Identificar y graficar a la superficie.

   b) Hallar los valores de $A, B \in\ \mathbb{R}$ de manera tal que la ecuación ξ corresponda a dos planos paralelos al plano coordenado xy.

Respuestas:

1.a $k = 5$, $Dist(L_1, L_2) = \frac{5}{\sqrt{2}}$

1.b. $\pi: 4y - z = 0$

2.a $[M(T)]_{Be} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

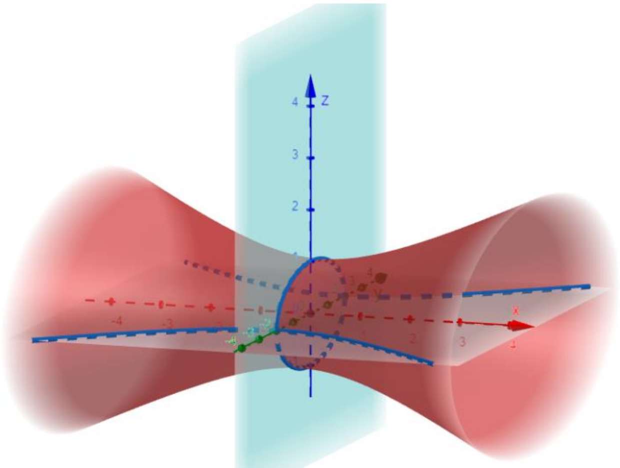
2. b T no es isomorfismo.

3. $S_1 \cap S_2 = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2[x] \ / \ \ c = -a \ \wedge b = 0\}$.

4.a Falso. M no admite inversa. $\text{Det}(M) = 0$

4.b verdadero. El sistema $Ax = \lambda x$ tiene solución no trivial.

5.a Hiperboloide de una hoja, $A = -\frac{1}{4}$ $B = -\frac{1}{4}$



5.b $A = B = 0$