ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Examen Final 31/07/2024

UTN.BA — UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL — FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

1	2a	2b	3	4	5	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto.

1) Sea *h(x)* una función continua en $\Re$, tal que para todo *x* es: $x^2 \le h(x) \le x^2 + 10$. Se sabe además que $h(3) \neq 0$ y $h(4) \neq 0$. Si $f(x) = \dfrac{h(x)}{x^2 - 7x + 12}$ determine su dominio y la ecuación de las rectas asíntotas al gráfico de *f*.

2a) Siendo $y = f(x)$ derivable, demuestre que la recta tangente a la curva $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2$ en el punto $P\,(a, b)$ es la recta $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

2b) Considere una función f que satisface la ecuación diferencial: $x\, f''(x) + 3x\,(f'(x))^2 = 1 - e^x$ $\forall x \in \Re$. Pruebe que si f alcanza un extremo relativo en $x_0 \neq 0$ entonces dicho extremo es un máximo.

3) Desde cierta altura se arroja un cuerpo de masa m con una velocidad inicial v_0. La ley que gobierna la velocidad de caída *v* en función del tiempo *t* es: $v(t) = \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k\,t}{m}} + \dfrac{mg}{k}$ donde *g* es la aceleración de la gravedad y *k* es un coeficiente positivo que toma en cuenta la resistencia del aire. Demuestre que si la resistencia del aire se hace despreciable, entonces la velocidad de caída responde al resultado bien conocido en física: $v(t) = v_0 + gt$

4) Sea la función $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e^{x-1}} f(\ln t)\, dt$, $\forall x \ge \dfrac{1}{2}$. Halle el polinomio de Taylor de segundo grado asociado a $g(x)$ en potencias de $(x-1)$, sabiendo que $\displaystyle\int_0^{-\ln 2} f(u)\, e^u du = 1$ y que el polinomio de segundo grado de Mac Laurin asociado a f es $P(x) = \dfrac{1}{2} - 4x + \dfrac{1}{3}x^2$.

5) Determine el comportamiento de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{k} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{1}{5}}}$ siendo *k* el supremo del intervalo de convergencia absoluta de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$