UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Examen Final 10-12-2024

APELLIDO DEL ALUMNO:... **NOMBRE:..............................**

CORRIGIO:... **REVISO:......................................**

1		2		3	4		5	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas.
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos.

---

1) *Sean*

$$r_1 : (x, y, z) = (2, 7, -1) + \alpha\,(3, -1, 0) \quad , \quad r_2 : (x, y, z) = (0, 3, 4) + \beta\,(0, 2, -1)$$

   a) *Hallar la ecuación de la recta* r *que pase por el punto* $P(-1, 2, 3)$ *y sea perpendicular a* r_1 *y a* r_2*.*

   b) *Hallar la intersección entre la recta* r *calculada en a) y el plano* $\pi : x - y + 2z + 7 = 0$

2) *Dada la ecuación:* $A\,(x-1)^2 + B\,(y+2)^2 + z = K$

   a) *Hallar todos los valores de* A, B *y* K *reales para que la ecuación represente un paraboloide cuyo vértice sea* $V(1, -2, -4)$ *y su intersección con el plano* $z = 0$ *sea una elipse de semieje focal paralelo al eje* x *de longitud* 4 *y semieje menor de longitud* 2*.*

   b) *Para* $A = -1$, $B = 1$ *y* $K = 3$*. Identifique y grafique la superficie.*

3) *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

   a) *Hallar* $a, b \in \mathbb{R}$ *para que* $(0, -1, 1)$ *sea autovector de* A

   b) *Para los valores hallados en a) decida si* A *es diagonalizable en* $\mathbb{R}$

4) *Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.*

   a) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n} : det(A) = 0$*. Entonces* A *no es diagonalizable.*

   b) *Sean* V *y* W *dos espacios vectoriales de dimensión finita tales que* $dim(V) \leq dim(W)$ *y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal entonces* T *es epimorfismo.*

5) *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una Transformación Lineal cuya matriz asociada es* $M(T)_{EB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Con E *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *y* $B = \{(0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$

   a) *Hallar todos los* $v \in \mathbb{R}^3$*, si existen, de modo que* $T(v) = (0, 2, 1)$

   b) *Hallar* $dim(N(T))$

Observación: *Con las notaciones* $R(T)$ *y* $N(T)$ *se hace referencia a la imagen y al núcleo de la Transformación Lineal respectivamente.*