UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Examen Final 16-12-2025

APELLIDO DEL ALUMNO:..... NOMBRE:.....

CORRIGIO:..... REVISO:.....

1		2		3		4		5	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas.
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos. Su examen se mostrará una vez corregido.

---

1) *Sean la recta s y el plano π dados por:*

$$s : \frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{4} = z \quad \pi : x - y - z = 0$$

a) *Obtener la proyección de s sobre π.*

b) *Dada la recta $r : (x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda\,(-3, b, c)$. Hallar $b, c \in \mathbb{R}$ para que la proyección de r sobre π sea un punto.*

Resolución:

a) Para hallar la proyección construimos un plano β que contenga a s y sea perpendicular a π. Luego $n_\beta = v_s \times n_\pi$

$$n_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, -3, 0)$$

Como β contiene a s , particular contiene al punto $P(4, -2, 0)$. Finalmente β queda $\beta : -3x - 3y + 6 = 0 \iff \beta : x + y - 2 = 0$. Para hallar la proyección se busca la intersección de β con π lo que equivale a resolver el sistema.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \qquad y = 2 - x \implies x - 2 + x - z = 0 \implies z = 2x - 2 \implies (x, 2 - x, 2x - 2)$$

Parametrizando queda $P_\pi^\perp(s) = (0, 2, -2) + t\,(1, -1, 2)$

b)Para que la proyección sea un punto la recta debe ser perpendicular al plano por lo cual se debe cumplir que

$$(-3, b, c) = \mu(1, -1, -1) \implies \mu = -3 \quad , \quad \mu = -b \implies b = 3 \quad c = -\mu = 3$$

Luego $(-3, b, c) = (-3, 3, 3)$

2) *Dada la ecuación: $A\,x^2 + y^2 - z^2 = 1$*

a) *Hallar $A \in \mathbb{R}$ para que su intersección con el plano $z = 2$ sea una elipse de eje focal x y distancia focal 4.*

b) *Dar una parametrizacion de dicha elipse.*

Resolución:

a) Si $z = 2$ *queda* $A\,x^2 + y^2 = 5$. *De acá sale que* $A \neq 0$ $\dfrac{x^2}{5/A} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. *Se sabe que* $2c = 4 \implies c = 2$ *y* $b = \sqrt{5}$. *Luego* $a^2 = b^2 + c^2$. *Reemplazando se tiene* $\dfrac{5}{A} = 5 + 4 \implies A = \dfrac{5}{9}$. *La ecuación de la elipse es* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

b)Parametrizaciones $\alpha : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^3 : \alpha(t) = (3\,cos(t), \sqrt{5}\,sen(t), 2)$

3) *Dados los subespacios*

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + z - 2w = 0 \quad , \quad x - 2y = 0\}$$

$$T = gen\{(2, 1, a, 0), (1, 0, 0, 1)\}$$

a) *Hallar* $a \in \mathbb{R}$, *si existe, para que* $dim(S + T) = 3$.

b) *Para* $a = 3$, *hallar una base y la dimensión de* $T^{\perp}$

Resolución:

a) Se buscaran los generadores de S

$$x = 2y \quad , \quad y = 2w - z \implies x = 4w - 2z \implies (x, y, z, w) = (4t - 2s, 2t - s, s, t) \implies (x, y, z, w) = t(4, 2, 0, 1) + s(-2, -1, 1, 0)$$

Luego $S = gen\{(4, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0)\} \implies S{+}T = gen\{(4, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0), (2, 1, a, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. *Para que* $dim(S{+}T) < 4$ *debe ocurrir*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \implies a + 1 - 4(a + 1) + 4(a + 1) = 0$$

$$\implies (a + 1) = 0 \implies a = -1$$

Reemplazando queda $S + T = gen\{(4, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$, *los vectores son claramente LI.*

Luego $B_{S+T} = \{(4, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$

b) Si $a = 3$ *queda* $T = gen\{(2, 1, 3, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. *Para hallar* $T^{\perp}$ *se hace*

$$(2, 1, 3, 0).(a, b, c, d) = 0 \quad (1, 0, 0, 1).(a, b, c, d) = 0 \implies a + d = 0 \quad 2a + b + 3c = 0 \implies d = -a \quad b = -2a - 3c$$

$$\implies (a, -2a - 3c, c, -a) = a(1, -2, 0, -1) + c(0, -3, 1, 0) \implies T^{\perp} = gen\{(1, -2, 0, -1), (0, -3, 1, 0)\}$$

4) *Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.*

a) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Si* A *tiene* n *autovalores distintos entonces la matriz* A^2 *tiene* n *autovalores distintos.*

b) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Si* $|A| = 0$ *entonces* A *no es diagonalizable.*

Resolución:

a) FALSO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)FALSO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $(1, 1, 0)$ *es autovector de* A,*analizar si* A *es diagonalizable.*

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda = 2 \quad k = \lambda \Longrightarrow k = 2$$

Para $k = 2$ se hallara el polinomio característico.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \Longrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 2)\left[(\lambda - 3)^2 - 1\right] \Longrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)$$

Véase ahora la dimensión del subespacio asociado a $\lambda = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = x + z \Longrightarrow (x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) \Longrightarrow S_2 = gen\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

Luego A es diagonalizable pues $\lambda = 2$ tiene orden de multiplicidad 2 y dos autovectores asociados.

Observación: *También se puede decir que como la matriz A_2 tiene rango 1, el sistema $A_2\, X = 0$ tiene un espacio solución de dimensión 2 y por ende A es diagonalizable.*